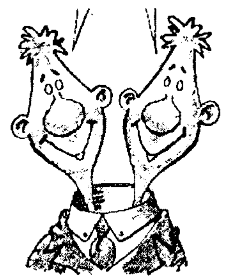
Robert Müller
Sir-Karl-Popper-Schule, Wien

Die siamesischen Zwillinge
Motivation & Begabungs-



Förderung

Während Motivation ein unbestritten positiv belegter Begriff ist, gilt dies für Begabungsförderung, insbesondere die Förderung Hochbegabter, nur bedingt und auch hier erst in allerletzter Zeit. Anhand meiner Arbeit als Autor und Lehrer in den letzten Jahren möchte ich über meine ganz persönliche Sichtweise zu diesem Thema vortragen. Der Bogen spannt sich dabei von einer (selbst-)kritischen Analyse der Situation über Erfahrungen aus der Schule bis hin zu Vorschlägen und Tipps für Ihren konkreten Unterricht.

Warum dieses Thema?

Zum einen ist es (wie „Schule" ganz allgemein) – neben Latein – ein in den Medien immer wieder breit aufgegriffenes Thema. Und hier ist es immer wieder auch die Sir-Karl-Popper-Schule, die im Rampenlicht der Medien steht, obwohl es etliche andere Initiativen in diese Richtung gibt. Stellvertretend für viele andere Artikel zur Popperschule mit öffentlicher Breitenwirkung sei auf die Artikel „Gute Noten kein Beweis für hohe Begabung" in der Zeitung „Standard" vom 17. Jänner 2002 oder „Wir sind keine Streber" aus der Sonntagsbeilage der Kronenzeitung vom 10. Dez. 2000 oder „Hochbegabtenförderung nicht nur im ´Biotop´" in der Zeitung „Die Presse" vom 23. Jänner 2002 verwiesen. Dort werden Erkenntnisse(?) wie „Wirklich gute Lehrer suchen die Fehler bei sich", Behauptungen wie „Das Pflichtfach ´KoSo´ erfreut sich besonderer Beliebtheit bei den Schülern" oder Zielvorgaben „Sozialprojekte aller Art sind für die Schüler ein Muss. Eine Regel, die auch für normale Schulen wünschenswert wäre" unters Volk gebracht.

Was in diesen Artikeln (größtenteils korrekt) über die *Intentionen* der Popperschule berichtet wird, hat Alfred Schirlbauer bereits als die *gerade moderne* „Transformation der Schule zu einer sozialpädagogischen Einrichtung" [L3, S. 13] vorweggenommen. Er schreibt: „Diagnostizierbar ist dieser Vorgang meines Erachtens an einer Vielzahl von Reformvorstößen, welche sich weitgehend ´reformpädagogischen´ Intentionen der Zwanzigerjahre unseres Jahrhunderts verdanken: Offenes Lernen und Freiarbeit, Projektarbeit und fächerübergreifendes Lernen, Ganzheitskonzepte und Gesamtunterricht, kritische Diskussion der Ziffernnoten bis hin zu Vorstößen, die Ziffernnoten zugunsten ganzheitlich-verbaler Persönlichkeitsbeurteilungen überhaupt zu suspendieren. Das Lehrer-Schüler-Verhältnis unterliegt demgemäß weitgehenden Veränderungen: Die fachliche Autorität und Kompetenz der Lehrer hat sich im Hintergrund zu halten, anvisiert ist der Lehrer als Animateur selbstständiger Schüleraktivitäten, als Fazilitator sozialer Prozesse, als Therapeut gestörter Kinderpersönlichkeiten, jedenfalls als Pädagoge, der die ´ganze´ Persönlichkeit des Kindes im Auge hat und für deren ganzheitliche Entwicklung Sorge trägt." Aber ist diese von Schirlbauer festgestellte „penetrante Sozialisation" [L3, S. 40f] und der „pädagogische Zeitgeist" [L3, S. 71f] (schon) „Begabungsförderung"?

Der Namenspatron der Schule, Karl Popper, hat warnend festgestellt [L2, S. 256]: „Nur eines bin ich bereit zuzugeben: dass wir dümmer sind als je zuvor und unkritisch dem gegenüber, was zu glauben gerade modern ist. Aber das wird nie gerne gehört und sicher auch nicht geglaubt". Genauer führt er dazu aus [L2, S. 274]: „Nach Russell sind wir zu gescheit, aber moralisch sind wir zu schlecht. Russells Ansicht wird von vielen geteilt, auch von vielen Zynikern. Ich glaube das genaue Gegenteil. Ich glaube, dass wir zu gut sind und zu dumm. Wir werden zu leicht von Theorien beeindruckt, die direkt oder indirekt an unsere Moral appellieren, und wir stehen diesen Theorien nicht hinreichend kritisch gegenüber; wir sind ihnen intellektuell nicht gewachsen und werden ihre gutwilligen und opferbereiten Opfer."

Im besten Sinne Poppers rufen Zeitungsberichte wie die obigen mit ihren (nicht weiter belegten) subjektiven Wertungen und plakativen Forderungen daher Diskussionsbeiträge (wie diesen Vortrag) wie auch Gegenstimmen auf den Platz, wie z.B. den Leserbrief „Über das Denken von Sir Karl Popper" in der Zeitung „Die Presse" vom 9. Februar 2002: „Gerichtet an die Sozialingenieure unter den Lehrern an der Sir-Karl-Popper-Schule" meint dort Mag. Josef Stargl mit ausdrücklichem Bezug auf das an der Popperschule neu eingeführte Pflichtfach KoSo (=Kommunikation und Sozialkompetenz): „Sir Karl Popper, der konstruktivistisch-technomorphe Denkweisen abgelehnt hat, dreht sich im Grab um."

Allerdings ist eine Diskussion, die die Besonderheiten dieses „Biotops" vergessend allzu abstrakt geführt wird, ebenso irrelevant wie eine, die sich den untergeordneten Stellschrauben des Schulalltags widmet. Um es deutlicher auszusprechen: Man kann leicht für oder auch gegen „Sozialprojekte" sein, solange nicht klar ist, was man darunter versteht bzw. verstehen *will*. Ebenso ist die Frage, ob man Kurse oder Labors mit nur 80, 70 oder (wie schon gefordert) sogar 60 Prozent Anwesenheit dennoch als voll absolviert angerechnet erhält, eine, die von den wirklich wesentlichen Fragen ablenkt: Nämlich ob dieses seit Jahrzehnten in Deutschland bzw. den USA praktizierte Kurs- und Laborsystem und die in den westlichen Bildungssystemen zunehmende „zwangstägige" Überantwortung des „Erziehungsauftrages" der Eltern an die (kompetentere?) „neue Priesterschaft" der Psychologen einen sinnvolle(re)n Ansatz darstellen. Ob sich überhaupt die Qualität des „Unterrichts" über die (bloße) *Änderung von Organisationsformen*, die „Humankompetenz" der heranwachsenden Jugend durch *Einführung eines neuen Pflichtfaches „KoSo"* (wesentlich) steigern lässt. (Meine persönlichen Erfahrungen damit und der immer wieder strapazierte Vergleich mit der Wirtschaft lassen mich daran zweifeln.)

Oder ob nicht – wie *prinzipielle Gegner* dieses Projekts (zu denen ich mich nicht zähle) behaupten – der Zweck der ganzen Übung der sei, über die Hintertür dieses Schulversuches politisch umstrittene Maßnahmen wie die Einführung der Ganztagsschule, von heruntertransformierten universitären Betriebsformen, sprich: abwählbaren(!) „Kursen", von Schulgeld und von Aufnahmeverfahren (deren Validität in Zweifel gezogen werden darf) im Regelschulsystem durchzusetzen. Als Indiz wird ins Treffen geführt, dass die Popperschule nicht als spezifisch für Hochbegabte geschaffene „Sonderform" (der Begriff „Eliteschule" wird möglichst vermieden) installiert wurde, sondern als AHS-Oberstufen-Schulversuch. Sie hat damit primär den Auftrag „Neuerungen" auszuprobieren und auf die *Tauglichkeit für das Regelschulwesen* zu testen. Und hier liegt der springende Punkt. Da Schulversuche (von Gesetzes wegen) zeitlich limitiert sind, hängt das „Überleben" dieser Form von - meines Erachtens *ehrlich gemeinter(!)* – Begabungsförderung von ihrer „Übernahme" in das Regelschulsystem ab (womit allerdings wieder ihre Spezifität verloren ginge). Darf man da etwas anderes erwarten als Berichte über ihre „erfolgreiche" Erprobung im „Biotop" oder in den Vorbild(?) gebenden Schulen und Unterrichtssystemen in Deutschland und den USA. Jedenfalls zeigen internationale Studien (TIMSS.jpg) Deutschland und die USA ganz weit unten. *Daraus* ergibt sich also kein Hinweis auf eine besser organisierte „Schule" und damit Handlungsbedarf für das „Kopieren" dieser Bildungssysteme.

Andererseits hat Österreich (jedenfalls bei TIMSS) ersichtlich auch nicht besser abgeschnitten, sodass durchaus Handlungsbedarf besteht – aber wahrscheinlich *vor allem ein anderer*. Lassen Sie mich *meinen* Standpunkt in Anlehnung an einen Zeitungsartikel des ehemaligen amtsführenden Stadtschulratspräsidenten Dr. Scholz kurz und plakativ so formulieren: Aus den Studien hat sich keine klare Präferenz für eine bestimmte *Organisationsform* von Schule ergeben. Viel *wesentlicher* ist offenbar die **Motivation, fachliche Qualität und Persönlichkeit der Lehrer** sowie die **Motivation und Begabung der Schüler** – womit ich beim eigentlichen Thema meines Vortrags angelangt bin.

Warum rede gerade ich über dieses Thema?

Nicht deswegen, weil ich nun seit eineinhalb Jahren an der Sir-Karl-Popper-Schule unterrichte und die dort praktizierte Begabtenförderung „von innen her" kenne, ihre (aus *meinem* Blickwinkel wahrgenommenen) „Stärken“ und „Schwächen“. Mein Wirken an dieser Schule ist nur der Anlass, nicht der Grund – schon auch deswegen, weil ich die Schule mit Ende dieses Schuljahres wieder verlassen werde. Der eigentliche Grund ist meine Tätigkeit als Autor und die damit verbundene Mitverantwortung für den konkreten Unterricht. Denn noch immer sind die Lehrbücher der „heimliche Lehrplan“ und nehmen maßgeblich auf das Unterrichtsgeschehen Einfluß. Insofern ist dieser Vortrag auch ein Teil *meiner* Antwort auf TIMSS und PISA. Abgesehen von meiner Einleitung, die Sie zum Mitdenken und Mitdiskutieren über die Zukunft unseres Schulsystems als einer der zentralen Institutionen unserer Gesellschaft ermuntern soll, will ich mich dabei in ganz *pragmatischer* Weise dem widmen, was jeder von Ihnen „an der Front“ für die Motivation und Begabtenförderung tun könnte und dies mit Erfahrungen und Beispielen aus meinem Wirken als Lehrer und Autor würzen.

Quellen für Motivation

Was ist Motivation? Wohl der Anreiz, irgend etwas zu tun.
Umgekehrt ist Demotivation der Anreiz, etwas nicht zu tun – nicht nur es zu lassen.
Dies gilt gleichermaßen für Schüler wie Lehrer (sowohl innerhalb als auch außerhalb der Schule).

Motivation ist also untrennbar mit Tätigkeit verbunden. Tätigkeit wiederum erfordert (und fördert damit) Fähigkeiten, (entdeckt und) weckt Begabungen und hilft sie zu entwickeln. Motivation und Begabungsförderung sind eben siamesische Zwillinge.

Die Quellen, aus denen wir (als Lehrer) schöpfen können, sind mannigfach, wenn auch nicht immer gleichermaßen ergiebig:

- **Interesse wecken für ...**
- **Vorstellungen verbinden mit ...**
- **Nützlichkeit aufzeigen von ...**
- **Kritik herausfordern an ...**
- **Kreativität ansprechen mit ...**
- **Spieltrieb anregen zu ...**
- **Wettbewerb schaffen zwischen ...**
- **Vorbilder schaffen für ...**

Lassen Sie mich diese Punkte durch konkrete Beispiele mit Leben erfüllen:

Kennen Sie die Buchreihe „**Wie funktioniert das**“ oder „Was ist was“ für Kinder? Wir Lehrer können davon viel lernen!

Haben Sie Ihre Schüler schon einmal gefragt, wie eine Seilrolle funktioniert, warum eine CD „Beschädigungen“ geringen Ausmaßes verzeiht und dennoch die Daten mehr oder weniger korrekt wiedergibt (Audio-CD) oder sogar rekonstruieren kann (Daten-CD). Was das mit Mathematik zu tun hat?

Haben Sie Ihre Schüler schon einmal gefragt, wie der Taschenrechner den Sinus oder die Wurzel berechnet? Wie eine Computertomographie entsteht? Wie Photonenrechner funktionieren?

Solche Fragen muss man als Lehrer meist gar nicht stellen, sie werden einem gestellt! Wenn nicht, so muss man halt **mit geeignetem Material der Neugierde ein wenig nachhelfen**. In der Neuauflage des Lehrbuches Reichel-Müller u.a.: „Lehrbuch der Mathematik 5“ [L1] wird dies (zusätzlich zu den schon bisher vorhandenen *Vorschauen* bzw. *Rückblicken und Ausblicken*) in Form von so genannten *Exkursen* unterstützt. Zur letzten Frage findet man etwa im Exkurs „Von Elektronen- und Photonenrechnern“ [L1, S. 54f] einen bewusst (auf 2 Seiten) kurz gehaltenen und „blickfangend“ gestalteten Beitrag (den wir hier wie auch die nachfolgend zitierten Exkurse aus Platzgründen leider nicht wiedergeben können).

Neugierig machen kann man auch mit **Anekdoten** – etwa dem altbekannten Interview:

Redakteur: „Herr Minister, wie viele Nullen hat eine Milliarde?“

Deutscher Wirtschaftsminister: „Ich glaube sieben.“

Redakteur: „Nein, das stimmt nicht.“

Deutscher Wirtschaftsminister: „Dann eben acht.“

Redakteur: „Nein, es sind neun!“

Erst vor wenigen Tagen las ich in der Tageszeitung „Kurier", dass „a billion $" etwas mehr als eine Billion Euro wären. Die Umrechnung war in den Dezimalen richtig, aber im Stellenwert um den Faktor 1000 falsch. Man sollte auch mit englischen Zahlnamen **die richtigen Vorstellungen verbinden**.

Wer aber hat schon z.B. eine „richtige" Vorstellung von der Größe unserer Staatsschuld. Ich habe einmal in einer Popperklasse (als Kopfrechenübung) die Probe aufs Exempel gemacht, indem wir eine Donaubrücke mit 1/3 Mrd. S veranschlagten und ausrechneten, wie weit von Wien aus stromaufwärts die Donau „überplattet" werden könnte. Schätzen Sie!

Wie man sich das Große schwer vorstellen kann, so auch das Kleine. In den Wüsten Namibias regnet es im Jahr nur durchschnittlich 3 mm. Dennoch müsste man dort nicht verdursten. Denn aus dem an rund 60-200 Tagen vom Meer aufziehenden Nebel kann man mit einem einzigen m^2 Spezialnetz aus den Abermillionen Tröpfchen eines einzigen Nebeltags 1-14 Liter Wasser gewinnen, im Schnitt immerhin 3,3 l. **Neugierig** gemacht könnte man nun die Schüler eine Anlage (nach stochastischen Gesichtspunkten) planen lassen. Wo die Vorstellung versagt, kann die Mathematik weiterhelfen.

Neben einer (besseren) Vorstellung hat man mit Beispielen dieser Art auch den **Nützlichkeitsaspekt** ins Auge gefasst, wenn auch Nützlichkeit in einer *uns* nicht unmittelbar betreffenden Art.

Konkreter und damit in unmittelbarer Weise für *uns* nützlich ist etwa ein Verständnis für die mathematische Konzeption unseres Steuersystems – selbst wenn die vielen rechtlichen Bestimmungen (Sonderregelungen, Einschleifregelungen, Zu- und Abschläge usw.) es dem einfachen Bürger fast unmöglich machen, seine Steuervorschreibung auf Cent genau nachzurechnen. Einen Einblick darin liefert z.B. der Exkurs „Wie rechnet der Finanzminister?" [L1, S. 180f].

Weitere Beispiele finden Sie im Exkurs „(Lineare) Optimierung in der Mathematik" [L1, S. 248f]. Denn gerade die *Optimierung* bringt Nützlichkeit im Sinne von *wirtschaftlichem* Nutzen.

Gerade hier heißt es aber auch gegenüber lange „Überliefertem" kritisch zu sein. Seit Generationen haben wir Lehrer schon das Beispiel der „optimalen Form" einer Bienenwabe hinsichtlich Raumausnutzung und Wachsverbrauch beschworen – aus Gründen der (leichteren) Berechenbarkeit in einer geometrisch stark vereinfachten Form [L9, Aufg. 461]. Tatsächlich ist die Bienenwabe aber an ihren „Graten" deutlich verstärkt, so dass sich – deutlich anders als im geometrischen Modell vorgesehen – dort 30-50 % des gesamten Wachsgewichtes befinden. Demgemäß wiegt eine Wabe mehr, als sie optimaler Weise wiegen dürfte. Dennoch ist die Bienenwabe optimal – allerdings in anderer Hinsicht: Es zeigt sich nämlich, dass die mit 15 bzw. 260 Hz auftretenden Vibrationssignale, die Bienen beim Schwänzeltanz erzeugen, durch das Netz der verstärkten „Waben-Grate" optimal weitergeleitet werden. Im Bienenstock hat Mutter Natur also nicht die Form der „Kinderkrippen", sondern das „Telefonsystem" optimiert [L5].

Man sieht: **Vorsicht und Kritik sind stets angebracht – und sollten gezielt zur Motivation eingesetzt werden.**

Alt – aber immer wieder gut – ist z.B. der „Beweis", dass jedes Dreieck gleichseitig ist [L8, S. 88].

Weitgehend bekannt sind auch „Beweise" von jener Art, wie wir sie im Exkurs „Knobeleien rund um Äquivalenzumformungen" [L1, S. 124f] bieten.

Überhaupt sind die Exkurse aus *bewährtem* Material entstanden (was nicht *altbekannt* und schon gar nicht *veraltet* bedeutet). Die Exkurse stellen (und beantworten) Fragen, die ich und wahrscheinlich viele unter Ihnen immer wieder von Schülern gestellt bekommen haben oder selbst (z.B. in Form von Arbeitsblättern) stellten. Denken Sie etwa an den Unendlichkeitsbegriff (Exkurs „Merkwürdiges von unendlichen Mengen" [L1 S. 38f] und Exkurs „Geradewegs ins Unendliche" [L1 S. 226f]).

Oder denken Sie an die immer wiederkehrende Frage, ob bzw. warum $0^0=1$ bzw. $0^0=0$ ist.

Nicht motivieren will ich zum Kritisieren um des Kritisierens Willen. In Anlehnung an Begriffe beim Stress möchte ich für Eukritik statt Diskritik plädieren, für konstruktive statt destruktive Kritik. Eukritik verlangt das Erkennen, Aufzeigen und standfeste Begründen von Alternativen, also Kreativität und intellektuelle Redlichkeit – kurz: ein hohes Maß an Persönlichkeit. Und genau darauf zielt die Motivation mittels **Denk(sport)aufgaben** [L5 und L6] ab.

In einschlägigen Büchern und Zeitschriften oder via Internet findet man Aufgaben in den verschiedensten Einkleidungen und Schwierigkeitsgraden – und unterschiedlicher Qualität! Dazu einige Beispiele:

Man multipliziere die Anzahl der Meere mit der Anzahl der Winde. Das Ergebnis teile man durch die Bremer Stadtmusikanten und addiere 1. Dann multipliziere man das Ergebnis mit dem Gefrierpunkt des Wassers in Grad Celsius. Wie lautet das Ergebnis?

Lösung: Wegen Multiplikation mit 0 natürlich 0.

Anmerkung: Auch wenn die Kenntnis der (mystischen) Anzahlen für Allgemeinbildung stehen sollte: Erkenne sie hier (wie auch in Wirtschaft und Politik, wo gezielt mit Nebensächlichkeiten die Aufmerksamkeit vom Wesentlichen weg gelenkt wird) als „Nebelgranaten"!

Gegeben ist eine Uhr mit einem normalen Zifferblatt. Wann überdecken sich beide Zeiger?

Lösung (laut Internet): Die erste Lösung ist natürlich trivial: Um 0.00h (bzw. 12.00h). Die weiteren Überdeckungen erfolgen im Intervall von 12/11 Stunden:

hh	: mm	: sec
01	05	0,454545455
02	10	0,909090909
03	16	0,363636364
04	21	0,818181818
05	27	0,272727273
06	32	0,727272727
07	38	0,181818182
08	43	0,636363636
09	49	0,090909091
10	54	0,545454545
12	00	0,000000000

Anmerkung: 12/11, weil es im Intervall von 12 Stunden genau 11 Überdeckungen der beiden Zeiger gibt, die gleich verteilt sind. (Die 12. Stunde ergibt sich aus 11 mal 5,4545.. min.) Man beachte und begründe (geometrisch) die Symmetrie in den *Dezimalen* (die im Internet *fälschlich* als Sekundendezimalen statt als Minutendezimalen angeführt werden).

Eine Stunde später ist es nur halb so lange bis Mitternacht wie zwei Stunden früher. Wie spät ist es?

Lösung 1: x ... Uhrzeit (24 Stundenanzeige)

$(2\cdot(x+1)) \bmod 24 = (x-2) \bmod 24$, mithin $x = (-4) \bmod 24$, also 20 Uhr

Lösung 2: x ... Anzahl der Stunden bis Mitternacht

$2\cdot(x-1) = x+2$, mithin $x = 4$, also $24-4 = 20$ Uhr

Anmerkung: Hier ist das Problem zunächst sprachlicher Natur! Mussten nicht auch Sie den Satz zweimal lesen? Bringen Sie den Schüler dazu Texte zu strukturieren, verschiedene Ansatzmöglichkeiten durchzudenken sowie selbst Varianten wie z.B. die folgende zu erfinden und zu hinterfragen: 11 Stunden später ist es nur halb so lange bis Mitternacht wie zwei Stunden früher. Wie spät ist es? Hier ist die Lösung 24 Uhr. Allerdings sind zwei verschiedene Mitternächte gemeint!

Auf dem Hinweg fuhr Karl mit 30 km/h, zurück aufgrund eines Defektes am Fahrrad nur mit 10 km/h. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr Karl?

Anmerkung: Nicht (wie leider oft geglaubt) ist das arithmetische Mittel $(30+10)/2 = 20$ Lösung, sondern das harmonische Mittel: $2\cdot30\cdot10/(30+10) = 15$. Denn braucht er für den Hinweg t Stunden, so für den Rückweg 3t Stunden, für den Gesamtweg $s = 2\cdot(30\cdot t)$ also 4t Stunden. Somit ist $v = 60t/4t = 15$.

"Antreten in Zweierreihen!" – Kurzes Chaos, geschafft, aber ein Soldat bleibt übrig.
"Antreten in Dreierreihen!" – ein Soldat bleibt wieder übrig.
"Antreten in Viererreihen!"– ein Soldat bleibt wieder übrig.
"Antreten in Fünferreihen!"– ein Soldat bleibt wieder übrig.
"Antreten in Sechserreihen!" – ein Soldat bleibt wieder übrig.
"Antreten in Siebenerreihen!" – endlich, Ende der Schikane, alle Soldaten stehen in Reih und Glied.
Wie viele Soldaten sind es (mindestens)?

Lösung: Das kleinste gemeinsame Vielfache von 2, 3, 4, 5 und 6 ist 60. Die gesuchte Zahl muss, um eins reduziert, ein Vielfaches von 60 und gleichzeitig ohne Rest durch 7 teilbar sein:

$1 \cdot 60 + 1 = 61 \quad 61/7 = 8$ Rest 5

$2 \cdot 60 + 1 = 121 \quad 121/7 = 17$ Rest 2

...

$5 \cdot 60 + 1 = 301 \quad 301/7 = 43$ Rest 0

Weitere Lösungen findet man, indem man jeweils das kgV (2, 3, 4, 5, 6, 7) = 420 addiert, also

$301 + 420 = 721$

$721 + 420 = 1141$

usw.

Ähnlich gebaut ist die folgende Aufgabe:

Ich habe hier ein Kartenspiel vor mir. Dieses besteht normalerweise aus 52 Karten. Aber es ist nicht mehr komplett;
wenn ich die Karten auf 9 Personen verteile, bleiben 2 Karten übrig.
wenn ich sie auf 4 Personen verteile, bleiben 3 Karten übrig.
wenn ich sie auf 7 Personen verteile, bleiben 5 Karten übrig.
Wie viel Karten habe ich in meinem Stapel?

Lösung: 47 Karten

Anmerkung: Auch wenn die Einkleidung diesmal weniger geglückt erscheint – wer spielt schon mit einem unvollständigen Spiel oder welches Kartenspiel benötigt 7 Spieler, auf die die Karten verteilt werden sollen, so hat das Beispiel doch seinen *mathematischen* Wert. Mathematik als Wissenschaft der abstrakten Strukturen und des „pattern matching" lässt sich oft nur an einer genügend großen Anzahl von *ähnlichen* Beispielen „erfahren". Die manchmal abfällig als „Aufgabenplantagen" titulierten Aufgabensammlungen in den Lehrbüchern befriedigen den (je nach Schüler unterschiedlich großen!) Bedarf an *ähnlichen* Beispielen, die für das Erkennen eben dieser Ähnlichkeit und der Abstraktion ihrer Gemeinsamkeiten zu einem (neuen) mathematischen „Objekt" oder „Verfahren" notwendig sind.

Familie Jones hatte sich mit ihrem Planwagen dem Treck auf dem Oregon Trail in Amerika angeschlossen, um ihr Glück im Wilden Westen zu versuchen. Dort angekommen, nahmen sie an einem der berühmt-berüchtigten Rennen teil, bei denen die vom Staat abgesteckten Landparzellen besetzt werden konnten. Dabei hatten sie sich ein schönes Stück Land ergattert und begannen nun, hier ihr neues Heim aufzubauen. Doch da gemunkelt wurde, dass die Smiths, die neuen Nachbarn der Jones, gemeine Betrüger seien, schickte Pa gleich am ersten Tag seinen ältesten Sohn George mit einer Ladung Pfähle los, damit er zum Nachbargrundstück hin einen soliden Grenzzaun ziehe.

Als Junge aus dem Osten hatte George noch nicht viel Erfahrung mit Zäunen, und so fing er einfach an, die Pfähle der Reihe nach mit einem Meter Abstand in den Boden zu rammen. Am Ende bemerkte er jedoch, dass ihm 250 Pfähle fehlten, um die gesamte Grenze mit einem Zaun zu versehen. Also fing er noch einmal von vorne an, diesmal ließ er einen Abstand von 3 Metern zwischen den Pfählen, doch am Ende hatte er nun 150 Pfähle übrig.

Welchen Abstand hätte er wählen müssen, um mit seinen Pfählen exakt hinzukommen?

Lösung (laut Internet): Es sei x die Anzahl der Pfähle. Es ist bekannt, dass die Grenzlänge

L = x + 250 m, und dass

L/3 = x – 150 m ist.

Man löse beide Gleichungen nach x auf und setze sie gleich, dann erhält man

2/3 L = 400

also

L = 600 m

und weiter

x = 350 Stück

Damit ist der Abstand

d = 600/350 = 1,71 m

Anmerkung: Trotz „richtigen Rechnens“ und „schöner Ergebnisse“ steckt darin wahrscheinlich ein fundamentaler Denkfehler: nur bei *geschlossenen* Zäunen – wobei der Text dies meines Erachtens (das Grundstück wäre sonst max. 2,25 ha groß und völlig vom Grundstück der Smiths eingeschlossen) ausschließt – definieren x Pfähle x Zaunfelder. Bei *nicht geschlossenen* Einfriedungen definieren x Pfähle nur (x–1) Zaunfelder, womit die Gleichungen lauten müssten:

L=(x–1)·1 m+250 m und

L=((x–150)–1)·3 m

also x = 351 statt 350; L und d bleiben gleich.

Merke: Auch Lösungen mit „schönen Zahlen“ sollte man zunächst misstrauen!

"Ich habe die Kuchen in die Küche gebracht", sagte Erich zu seiner Mutter, "drei verschiedene Sorten zu 12 Cents, 14 Cents und 17 Cents. Insgesamt zwei Euro und wie gewünscht (wie dein Haar) schön goldblond." "Sehr gut", sagte seine Mutter, die gerade ein Buch las, "wie viele hast du insgesamt gekauft?" Erich sagte ihr die Gesamtanzahl der Kuchen. Seine Mutter las weiter. Aber einige Augenblicke später ließ sie das Buch sinken. "Ich kann immer noch nicht herausfinden, wie viele Kuchen du von jeder Sorte gekauft hast. Hast du von einer Sorte nur einen einzigen Kuchen gekauft?" Erich beantwortete ihre Frage, mit "ja" oder "nein". Jetzt wußte seine Mutter, wie viele Kuchen von jeder Sorte in der Küche lagen.

Lösung: Mögliche Einkaufskombinationen:

	12c		14c		17c	
(1)	1	+	11	+	2	= 14
(2)	3	+	2	+	8	= 13
(3)	4	+	6	+	4	= 14
(4)	7	+	1	+	6	= 14
(5)	8	+	5	+	2	= 15

Wäre die Gesamtzahl 13 oder 15, wüßte die Mutter sofort Bescheid. Es können also nur 14 Kuchen gewesen sein. In den Zeilen (1) und (4) wird von je einer Sorte nur ein Kuchen gekauft. Antwortete Erich auf die abschließende Frage mit "Ja", wäre keine eindeutige Lösung möglich. Also muß er wohl mit "Nein" geantwortet haben. Es ergibt sich also Zeile (3):

4 Kuchen zu 12 Cents

6 Kuchen zu 14 Cents

4 Kuchen zu 17 Cents

Anmerkung: Hochachtung vor der Frau, die gleichzeitig ein Buch lesen und diese schwierige Aufgabe in nur wenigen Augenblicken zu lösen imstande ist. Da wage noch jemand Blondinenwitze zu erzählen!

Zum Ausgleich eine Aufgabe, wo ein Mann im Mittelpunkt steht, dem auch unsere Hochachtung zukommen sollte. Diese Aufgabe bietet neben dem (viel leichteren) mathematischen Inhalt vor allem anekdotenhaft eingekleidet historische „Fakten" (denn über das Leben des Diophantos, der um 250 n. Chr. in Alexandria lebte, ist in Wahrheit fast nichts bekannt).

Diophantos verbrachte 1/6 seines Lebens als Kind, 1/12 seines Lebens als Junge und 1/7 seines Lebens vor der Heirat. Fünf Jahre später wurde sein Sohn geboren, der halb so alt wurde wie Diophantos selbst. Nach dem Tod seines Sohnes verbrachte Diophantos vier Jahre in Trauer, bevor er starb. Wie alt war Diophantos, als er starb?

Lösung: Sei A das Sterbealter des Diophantos. Dieses ergibt sich aus der Summe der einzelnen Lebensspannen: A = A/6 + A/12 + A/7 + 5 + A/2 + 4, also A = 84

Man setze die Reihen fort: a) 8, 3, 1, 5, 9, 0, ... b) e, z, d, v, f, ...

Lösung:

a) 8, 3, 1, 5, 9, 0, *6, 7, 4, 10, 2* (Die Zahlen von Null bis 10 in alphabetischer Reihenfolge der Zahlwörter: acht, drei, eins, fünf, ...)

b) e, z, d, v, f, *s, s, a, n, z* (Die Anfangsbuchstaben der Zahlwörter der natürlichen Zahlen beginnend mit eins: eins, zwei, drei, ...)

Anmerkung: Gerade diese „Intelligenzprüfungsaufgaben" haben weniger mit Mathematik zu tun als mit einem „Gespür" für das, was der „Prüfer" hören will – vielleicht auch mit Phantasie! Denn vom Standpunkt der Mathematik ist *jede* Fortsetzung eine *richtige* Fortsetzung – obwohl die Psychologen das in ihrer Auswertung nicht gelten lassen (wollen).

Viel eher von mathematischen Gespür erscheinen mir Rätsel wie das folgende, denn hier wird (von begabten Schülern) nicht nur probiert, sondern „ge- und bedacht", via Nebenbedingungen (z.B. Ganzzahligkeit) oder überschlägigem Rechnen gleich „Unmögliches" ausgesondert:

Lehrbub Müller soll die Zahl 21 (am Schaufenster) anschreiben, hat aber nur die Ziffern 1, 5, 6 und 7 und die Zeichen der vier Grundrechnungsarten zur Verfügung. Kann er das schaffen, ohne die Ziffer 2 kaufen zu gehen, wenn er die Ziffern nur einfach und die Rechenzeichen mehrfach besitzt?

Lösung: 6/(1-5/7)

Nützlich im utilitaristischen Sinn sind solche Problemstellungen natürlich trotz „lebensnaher" Einkleidung nicht, wohl aber nützlich für die Entfaltung mathematischer Begabungen. Das gilt auch für die folgende Aufgabe:

Nehmen wir (vereinfachend) an, die Erde sei exakt eine Kugel mit dem exakt 40 000 Kilometer langen Äquator. Wir wickeln eine Schnur um den Äquator. Die Schnur ist genau 40.000 km und einen Meter lang, sodass ein Meter übrigbleibt und wegsteht. Das wollen wir aber nicht, und so fügen wir die beiden Enden der Schnur zusammen und verteilen den Überschuss gleichmäßig um die Erde. Kann eine Ameise zwischen Erde und Schnur durchschlüpfen?

Lösung: ja, denn der Abstand ist mit rund 16 cm mehr als ausreichend.

Anmerkungen: Überraschenderweise erhält man für die Erde das gleiche Ergebnis wie für einen Fußball, weil wegen $(r+h)\cdot 2\pi\cdot = (r+1)\cdot 2\pi$ folgt $h = 1/(2\pi)$ das Ergebnis von r unabhängig ist. (Man vergleiche Kap. 5.5 und 5.6 sowie 10.6 in [L1]!)

Die Fehleranfälligkeit eigener und fremder *Schätzungen* einschätzen zu lernen ist (in der von mir georteten Atmosphäre zunehmender Antiaufklärung und Faktenverweigerung in unserer Gesellschaft) besonders wichtig:

Die Melonenernte wird von der Plantage zum Bahnhof transportieren. Auf einem Lastwagen befinden sich zu Anfang genau 1 Tonne Melonen, die ja bekanntermaßen zu 99 % aus Wasser bestehen. Die lange Fahrt durch eine heiße Wüstenlandschaft lässt einen Teil des Wassers verdunsten, so dass die Melonen bei Ankunft am Bahnhof nur noch zu 98 % aus Wasser bestehen.

Wie viel wiegt die Ladung des LKW nun noch?

Lösung: Die Ladung des LKW wiegt nur noch 500 kg.

Die Melonen wiegen insgesamt 1000 kg. 99% davon sind Wasser. Das Wasser wiegt also 990 kg, der „feste" Rest wiegt demnach 10 kg.

Wenn die Melonen nur noch zu 98% aus Wasser bestehen, macht der „feste" Rest 2% aus. Er wiegt aber immer noch 10 kg (nicht 20 kg, weil nicht einfach aus dem Nichts Fruchtfleisch entsteht). Es ist also das Gewicht zu finden, von dem 10 kg 2% sind. Das sind 500 kg, also die Hälfte des Ausgangsgewichts.

Anmerkung: Reingefallen?? Hier verschätzt sich meiner Erfahrung nach *jeder*!

Aufgaben wie die obige können auch zur **Förderung von lateralem Denken** Anlass geben:

Da der Transport erst morgen Früh starten kann, wird der bis oben hin schwer beladene Lastwagen am Abend (zum Schutz vor Dieben) in die Garage geführt, wo er gerade noch die Durchfahrtshöhe schafft. Am Morgen kann er nicht mehr heraus? Was ist passiert? Was kann man tun?

Lösung: Er wurde durch Verdunsten des Wassers leichter und damit (Reifen, Federn) höher! Abhilfe schafft den Reifendruck zu erniedrigen.

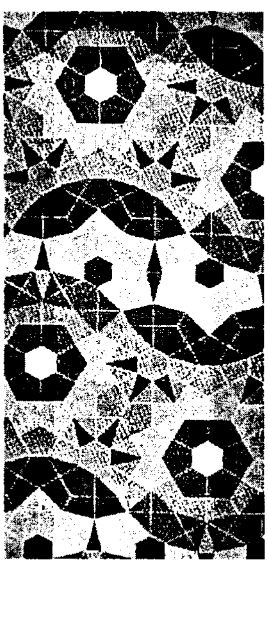
Zur Förderung dieses lateralen Denkens muss man dieses herausfordern, also ungewöhnliche oder auch nur **ungewohnte Einkleidung erfinden** lassen (wie ich das mit meinen Popperklassen einige Male tat), auch wenn (die) eine Lösung dann nicht schwer zu finden ist.

Je nach dem, wie man eine quaderförmige Schachtel abstellt, benötigt sie eine Stellfläche von 360 bzw. 800 bzw. 720 cm². Wie hoch/breit/lang ist die Kiste?

Lösung: (18|20|40) cm

Anmerkung: Wer hier durch laterales Denken nicht nur an stabile Gleichgewichtszustände (eine Seitenfläche ist jeweils Stellfläche) sondern auch an labile Gleichgewichtszustände (Balance auf einer Seitenkante bei homogener Masseverteilung) denkt, macht sich das Leben sehr viel schwerer und erhält natürlich eine andere Lösung!

Laterales Denken ist „Kreativität" pur – so wie Kunst. **Künstlerische und kreative Betätigung sollte daher auch als Quelle für Motivation und Begabungsförderung genützt werden.** Das kann schon in der Unterstufe beginnen, wo etwa beim Ausmalen von „Kreisbogensternen" oder „Vierecksparkettierungen" der ästhetische Reiz ornamentaler und figuraler Kunst zur selbstständigen Beschäftigung mit Ornamenten und Parkettierungen „verführen" soll (Parkettierung1_sp1_2000.jpg). Damit wird automatisch ein Nachdenken über deren mathematische Gegebenheiten wie z.B. Symmetrien sowie einfachen Konstruktionsverfahren (Parkettierung2_sp1_2000.jpg) bis hin zu geometrischen Denksportaufgaben wie der „Quadratur eines Quadrats" (Quadratkachelung_sp4_1998.jpg) oder der Zerlegung und Zusammensetzung von Figuren zu neuen Figuren wie bei „Tangram" (Tangram_sp8_1998.jpg) angeregt!



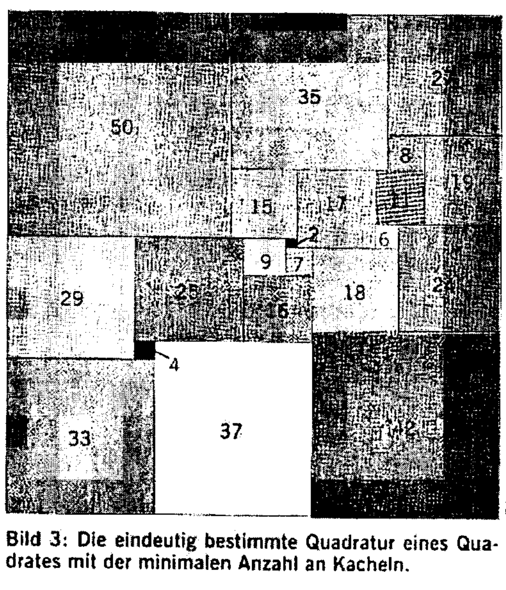


Bild 3: Die eindeutig bestimmte Quadratur eines Quadrates mit der minimalen Anzahl an Kacheln.

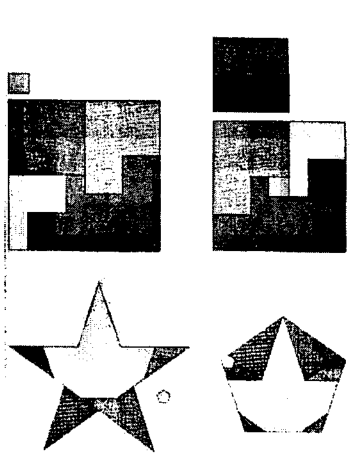


Bild 7: Die gemeinsame Zerlegung zweier Quadrate in fünf Teilstücke von Greg Frederickson (oben) veranschaulicht die Gleichung $7^2+4^2=8^2+1^2$. Nach demselben Verfahren kann man Zerlegungen für zahlreiche Quadratpaare konstruieren, deren (ganzzahlige) Seitenlängen die Gleichung $x^2+y^2=z^2+w^2$ erfüllen. Alfred Varsady hat eine Fülle von Beziehungen zwischen fünf- und zehnspitzigen Figuren entdeckt. Damit fand er unter anderem eine achtteilige gemeinsame Zerlegung für einen Fünfstern mit kleinem Fünfeck einerseits und ein großes Fünfeck andererseits (unten).

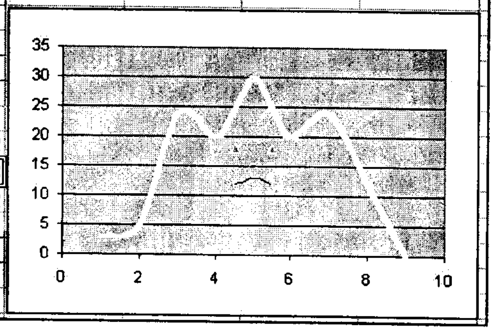
Jedenfalls beflügeln meiner Erfahrung nach vor allem geometrische bzw. geometrisch-codierte Sachverhalte wie z.B. magische Quadrate die Phantasie und Kreativität. Die nebenstehende Figur zeigt in der Bildmitte ein so genanntes supermagisches Quadrat. Parkettiert man mit ihm die Ebene, so bildet jeder beliebige 4x4- und 2x2-Ausschnitt seinerseits ein magisches Quadrat (Supermagisch_sp2_1999.jpg).

0	14	3	13	0	14	3	13	0	14	3	13
7	9	4	10	7	9	4	10	7	9	4	10
12	2	15	1	12	2	15	1	12	2	15	1
11	5	8	6	11	5	8	6	11	5	8	[illegible]
0	14	3	13	0	14	3	13	0	14	[illegible]	13
7	9	4	10	7	9	4	10	7	[illegible]	4	10
12	2	15	1	12	2	15	1	12	2	15	1
11	5	8	6	11	5	8	6	11	5	8	6
0	14	3	13	0	14	3	13	0	14	3	13
7	9	4	10	7	9	4	10	7	9	4	10
12	2	15	1	12	2	15	1	12	2	15	1
11	5	8	6	11	5	8	6	11	5	8	6

Die Beschäftigung mit solchen Problemen erlaubt, (auch) den **Spieltrieb gedanklicher wie instrumenteller Natur zur Motivation** zu nützen. Dabei kann und soll von den modernen Instrumenten (Computer, TI-92, usw.) und multimedialer Darstellung *sinnvoll* Gebrauch gemacht werden. Ein nettes Beispiel dafür ist die im Internet zu findende Powerpointpräsentation eines Zahlenrätsels (mathe.pps).

Nicht zuletzt deswegen haben wir in unserem Lehrbuch die Einbindung von Programmen, zusätzlichem Bildmaterial usw. immer schon unterstützt, früher mittels Lehrerbegleitheften und Begleitdisketten, neuerdings via Internet (http://www.oebvhpt.at/mathematik/rm). Dort findet man z.B. EXCEL-Mappen zur „spielerischen" Darstellung von Grundschaltungen (5S042_Schalter.xls) oder zum „spielerischen" Umgang mit Funktionsgraphen (5S147_Gespenst.xls), deren dynamische Veränderung(smöglichkeit) in gedruckter Form nur ungenügend vermittelt werden kann.

	A	B	C	D	E	F
1	öbv&hpt	Gespenst:				
2						
3						
4	x-Achse	Körper	Auge links	Auge rechts	Nase	Mund
5	1	3				
6	2	5				
7	3	24				
8	4	20				
9	4,5	25	18			12
10	5	30			15	13
11	5,5	25		18		12
12	6	20				
13	7	24				
14	8	12				
15	9	0				



Das Ziel ist natürlich nicht das Spiel oder die Befriedigung des Spieltriebs an sich!

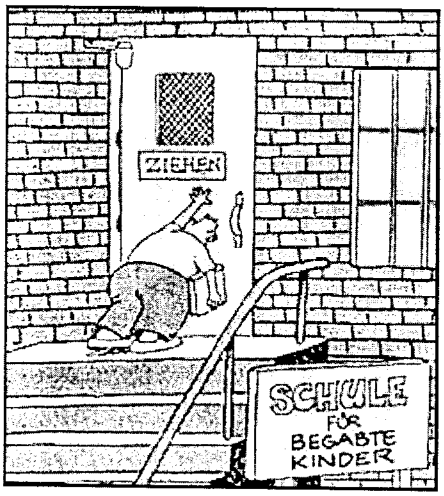
So schreibt der bekannte Psychologe Dietrich Dörner in „Die Logik des Misslingens – Strategisches Denken in komplexen Situationen" [L4, S. 309]:

„Wir haben heute die Möglichkeit, solche Lernprozesse in Gang zu setzen. Spielen war immer eine wichtige Methode zur Vorbereitung auf den Ernstfall. Man sollte es in gezielter Weise verwenden. Wir haben dafür heute viel bessere Möglichkeiten als früher. Wir sollten sie nutzen! Ist das eine frivole Forderung? Spielen, um Ernst zu machen? Nun: Wer Spiel nur als Spiel betrachtet und Ernst nur als Ernst, hat beides nicht verstanden."

Spiel als Vorbereitung auf ein (mögliches) Leben in einer Welt, wo man mit den „Haien" um die Wette schwimmen muss. Wir müssen daher auch **Wettbewerb als Motivationsquelle** nützen (dürfen)! Sei es durch Teilnahme an fremd-organisierten Wettbewerben wie dem „Känguru-Wettbewerb" oder „Jagd auf Zahlen und Figuren", an Mathematik-Olympiaden usw. Oder sei es durch die vom Lehrer *geeignet* organisierten Schularbeiten (die ich z.B. in der Popperschule via mit Bonuspunkten honorierten (denk-)schwierigeren Zusatzaufgaben „hochbegabtenwürdig" würzte). Es ist meines Erachtens kurzsichtig und tendenziell selbstbetrügerisch, auf Schularbeiten (wie in der Popperschule möglich und befürwortet) *gänzlich* verzichten zu wollen. Es ist jener Zeitgeist, der einer intransparenten und diffusen Beurteilung (aus der bloßen, kaum nachvollziehbaren subjektiven „Beobachtung") den Vorzug gibt gegenüber einer „objektiv" nachvollziehbaren!

Aus Wettbewerben kann der Schüler erkennen, wo er *wirklich* steht, begründet stolz sein oder aber auch begründet unzufrieden mit sich (und der Welt, die er aber kaum ändern kann). Auch das ist Ansporn – eben auf „psychosozialer" Ebene. Hier kann der Lehrer (zu Recht) loben oder tadeln – allerdings nur dann, wenn er selbst seiner übergeordneten **Vorbild-Funktion in motivierender Weise** nachkommt!

Lassen Sie mich den Vortrag mit einem Gleichnis beenden. Betrachten wir Unterricht (wie ich ihn verstehe und vertrete) als Bergbesteigung. Der Lehrer ist der Bergführer. Er hat *mit* das Interesse an der mühsamen Bergbesteigung zu wecken, *Neugierde*, wie es am Gipfel aussieht. Er hat die *Nützlichkeit* der (Vorbereitung der) Aktion aufzuzeigen, die Route und die Geschwindigkeit der ihm *anvertrauten* Gruppe *verantwortlich* vorzugeben, sie *zwischendurch* zu reizvollen Aussichtspunkten zu führen um die Mühsal der Etappen dazwischen „vergessen" zu machen. Er muss vor allem seine Freude, ja seine *Begeisterung* an den Bergen und am gemeinsamen Gipfelsieg zeigen können (obwohl man dabei – wie am eigenen Leib erfahren – durch die eigene Begeisterung bei einigen Schülern auch „Angst" erzeugen kann). Er muss *Vorbild und Weggefährte* sein – nicht (bloß) Entertainer oder (bequem im Tal sitzender) Organisator und schon gar nicht Fälscher des Gipfelkreuzbuches!



Literatur:

[L1] Reichel-Müller, u.a.: Lehrbuch der Mathematik 5
Verl. oebvhpt, Wien 2001

[L2] Karl Popper: Alles Leben ist Problemlösen
Verl. Piper, München 1994

[L3] Alfred Schirlbauer: Im Schatten des pädagogischen Eros
Verl. Sonderzahl, Wien 1996

[L4] Dietrich Dörner: Die Logik des Mißlingens – Strategisches Denken in komplexen Situationen
Verl. rororo, Reinbek 1998

[L5] Monatszeitschrift Spektrum der Wissenschaft,
April 1998, August 1998, Februar 1999, Jänner 2000, Februar 2000,

[L6] Diverse Rätsel unter http://www.janko.at/Raetsel/Mathematik

[L7] Pädagogische Reihe Nr. 27: Begabungsförderung
VCL, Wien 2002

[L8] W. Lietzmann: Wo steckt der Fehler
Verl. Teubner, Stuttgart 1972

[L9] Rosenberg-Ludwig-Wühr: Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus Arithmetik und Geometrie mit einem Leitfaden und Lösungen für die 7. und 8. Klasse
Verl. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1974

Hinweis: Eine elektronische Fassung dieses Textes im Word-Format (mit aktiven Links und Bildern) findet man zum Download unter der Internetadresse http://www.oebvhpt.at/mathematik/rm.